

Dans cette séance on va voir

29.10

- (i) exemple sur la matrice d'une application linéaire
- (ii) le thm. du rang $\leftarrow$ le rang d'une app. lin / matrice
- (iii) la notion d'espace colonne / ligne
- (iv) ~~la notion de matrice de passage~~ $\leftarrow$ la prochaine fois!

Exemple 4.57

$$\bullet T: \mathbb{P}_2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$T(p) := \begin{pmatrix} p(0) \\ p'(1) \end{pmatrix}$$

dérivée
de p $\uparrow$

} Test linéaire (exo)

$$\bullet \mathcal{B}_{\text{can}} = \{1, t, t^2\}$$

$$\bullet \mathcal{B}'_{\text{can}} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

On veut calculer

$$[T]_{\mathcal{B}'_{\text{can}} \leftarrow \mathcal{B}_{\text{can}}} := \begin{bmatrix} [T(1)]_{\mathcal{B}'_{\text{can}}} & [T(t)]_{\mathcal{B}'_{\text{can}}} & [T(t^2)]_{\mathcal{B}'_{\text{can}}} \end{bmatrix}$$

$$T(1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow [T(1)]_{\mathcal{B}'_{\text{can}}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$T(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow [T(t)]_{\mathcal{B}'_{\text{can}}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$T(t^2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow [T(t^2)]_{\mathcal{B}'_{\text{can}}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Alors $[T]_{B_{can} \leftarrow B_{can}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

Soit maintenant

$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\} \longrightarrow$ Orverts calculator $[T]_{B \leftarrow B_{can}}$

$$[T]_{B \leftarrow B_{can}} = \begin{bmatrix} [T(1)]_{B'} & [T(t)]_{B'} & [T(t^2)]_{B'} \end{bmatrix}$$

$T(1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right]_{B'} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} \Leftarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$T(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right]_{B'} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} ? \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$\left[\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right]_{B'} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix} \Leftarrow \begin{bmatrix} \alpha_1 = 1/2 \\ \alpha_2 = -1/2 \end{bmatrix} \Leftarrow \begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 = 0 \\ \alpha_1 - \alpha_2 = 1 \end{cases} \text{ III } \boxed{\text{SFL}}$

$$T(t^2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right]_{B'} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Alors

$$[T]_{B' \leftarrow B_{\text{can}}} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 1 \\ 1/2 & -1/2 & -1 \end{pmatrix}$$

□

§ 4.9 + § 5.6 | Le théorème du rang

THM Soit $T: V \rightarrow V'$ une application linéaire entre deux EV de dim finie. Alors,

$$\dim(\text{Ker}(T)) + \underbrace{\dim(\text{Img}(T))}_{\substack{\uparrow \\ \text{dét} \text{ rang de } T}} = \dim(V)$$

De façon équivalente, si $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$,

$$\dim(\text{Ker}(A)) + \underbrace{\dim(\text{Img}(A))}_{\substack{\uparrow \\ \text{dét} \text{ rang de } A}} = n$$

(Rappel)

$$\text{Img}(A) := \text{Img}(T_A)$$

$$\text{Ker}(A) := \text{Ker}(T_A)$$

$$\text{où } T_A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m \\ \vec{v} \mapsto A \cdot \vec{v}$$

Nouvelle déf Si $A = [\vec{a}_1 \dots \vec{a}_n]$ $\leadsto$ $\text{Col}(A) := \text{Vect} \{ \vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n \} \subseteq \mathbb{R}^m$
(colonnes de A)

pour $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$

$$A = \begin{pmatrix} \bar{l}_1^T \\ \vdots \\ \bar{l}_m^T \end{pmatrix} \leadsto \text{Lgn}(A) := \text{Vect} \{ \bar{l}_1, \dots, \bar{l}_m \} \subseteq \mathbb{R}^n$$

($\bar{l}_1^T, \dots, \bar{l}_m^T$ sont les lignes de A)

(e.g. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$, $l_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $l_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$, $l_3 = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix}$)

FAIT $\text{Col}(A) = \text{Img}(A)$

(Rappel) Pour trouver une base de $\text{Col}(A) = \text{Img}(A)$

① $A \rightarrow \dots \rightarrow \tilde{A}$ FER de A
 $(A = [\bar{a}_1 \dots \bar{a}_n]) \quad (\tilde{A} = [\tilde{a}_1 \dots \tilde{a}_n])$

② les numéros des colonnes de $\tilde{A}$ avec des pivots
 $\tilde{a}_{i_1}, \dots, \tilde{a}_{i_r}$

on les appelle "colonne-pivot" $\rightarrow \{a_{i_1}, \dots, a_{i_r}\}$ base de $\text{Img}(A)$

FAIT $\text{Lgn}(A) = \text{Lgn}(\tilde{A})$ si $\tilde{A}$ est FER de A .

Et les lignes non nulles de $\tilde{A}$ forment une base de $\text{Lgn}(A) = \text{Lgn}(\tilde{A})$

THM. 5.81 Pour toute matrice A on a que
 $\text{rang}(A) = \text{rang}(A^T)$.

Exemple Soit $T: \mathbb{P}_2 \rightarrow \mathbb{R}^2$

$$T(p) = \begin{pmatrix} p(0) \\ p'(1) \end{pmatrix}$$

On a vu que

$$T(1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$T(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$T(t^2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\leadsto [T]_{\mathcal{B}'_{\mathbb{R}^2} \leftarrow \mathcal{B}_{\mathbb{P}_2}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

sous forme échelonnée
réduite

Alors $[T]_{\mathcal{B}'_{\mathbb{R}^2} \leftarrow \mathcal{B}_{\mathbb{P}_2}}: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ est surj $\Rightarrow \underline{T \text{ surj}}!$

Le THM du rang dit $\dim(\text{Ker}(T)) + \dim(\text{Im}(T)) = 3$

Or $\text{Im}(T) = \mathbb{R}^2$ car T est surj $\Rightarrow \dim(\text{Im}(T)) = 2$

On conclut que $\dim(\text{Ker}(T)) = 3 - 2 = 1$.

$\Rightarrow T$ n'est pas injective

Si l'on trouve un polynôme $p \in \text{Ker}(T)$ non nul alors $\{p\}$ est base de $\text{Ker}(T)$.

$$p(0) = 0 \text{ et } p'(1) = 0$$

$$p(t) = at^2 + bt \rightsquigarrow p'(t) = (2at + b) \Big|_{t=1} = 2a + b$$

on veut $2a + b = 0$

e.g. $a = -\frac{1}{2}$ et $b = 1$

$$p(t) = -\frac{1}{2}t^2 + t$$

$$\in \text{Ker}(T)$$

et $\left\{-\frac{1}{2}t^2 + t\right\}$ base de $\text{Ker}(T)$.

Autre façon de calculer $\text{Ker}(T)$

$$[T(p)]_{\mathcal{B}'_{\text{can}}} = [T]_{\mathcal{B}'_{\text{can}} \leftarrow \mathcal{B}_{\text{can}}} [p]_{\mathcal{B}_{\text{can}}}$$

Alors

$$p \in \text{Ker}(T) \iff [p]_{\mathcal{B}_{\text{can}}} \in \text{Ker}([T]_{\mathcal{B}'_{\text{can}} \leftarrow \mathcal{B}_{\text{can}}})$$

$$\bar{x} = [p]_{\mathcal{B}_{\text{can}}} \in \text{Ker} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = -2x_3 \end{cases}$$

$$\text{Ker}(T) = \left\{ x_3 \cdot (0 - 2t + 1.t^2) : x_3 \in \mathbb{R} \right\} \iff \text{Ker} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \left\{ x_3 \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} : x_3 \in \mathbb{R} \right\}$$